MATIÈRES À OPTION

(Option générale)

MATHÉMATIQUES — DURÉE : 3 heures

PRÉLIMINAIRE.

Développer en séries entières les trois fonctions qui, à x réel, associent respectivement :

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x},\ f_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f_3(x) = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Préciser les rayons de convergence des séries obtenues.

NOTATIONS.

a. Dans tout le problème, on notera P (A) la probabilité d'un événement A, P (A/B) la probabilité de A conditionnellement à l'événement B.

Si X est une variable aléatoire (abrégé v.a.), on notera E(X) et V(X) respectivement son espérance et sa variance, lorsqu'elles existent.

b. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction génératrice de X, notée g_X (ou g s'il n'y a pas d'ambiguïté), par $g_X(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k)\, s^k$. On rappelle que le rayon de convergence d'une telle série est supérieur ou égal à 1 et que, sous réserve d'existence :

$$E(X) = g'_X(1)$$
$$V(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2.$$

c. On s'intéresse à différents événements liés aux naissances d'enfants. On suppose que pour chaque naissance la probabilité que ce soit une fille est notée p, et que ce soit un garçon est $q = 1 - p$, avec $0 < p < 1$.

On néglige les probabilités de naissances multiples.

On suppose que les naissances successives sont indépendantes les unes des autres et que les méthodes contraceptives sont parfaites.

***

PREMIÈRE PARTIE

1.1. On considère la v.a. N égale au nombre d'enfants d'un couple qui se donne pour but d'avoir exactement une fille, qui a donc des enfants jusqu'à ce qu'il ait une fille, et qui n'en a plus aucun ensuite.

1.1.1. Déterminer la loi de N, sa fonction génératrice et le rayon de convergence de celle-ci. Calculer E (N); montrer que :

$$V(N) = \frac{q}{p^2}.$$

1.1.2. Dessiner le diagramme en bâtons de la loi de N (c.-à-d. le diagramme représentant pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(N = k)$ en fonction de k) pour $p = q = 0{,}5$; déterminer le plus petit entier k_0 tel que $P(N \leqslant k_0) \geqslant 0{,}95$.

1.1.3. On ne suppose plus $p = q = 0{,}5$ mais k_1 et k_2 entiers strictement positifs. Calculer la probabilité conditionnelle : $P(N > k_1 + k_2 / N > k_1)$. Interpréter le résultat.

1.2. On considère maintenant la v.a. Y_2 égale au nombre d'enfants d'un couple qui se donne pour but d'avoir exactement deux filles.

1.2.1. Montrer que Y_2 peut être considérée comme la somme de deux v.a. indépendantes de même loi que N.

N.B. — *A défaut de le trouver, les candidats sont invités à admettre le résultat afin de pouvoir poursuivre.*

En déduire la loi de Y_2, sa fonction génératrice et le rayon de convergence de celle-ci. Calculer l'espérance et la variance de Y_2.

1.2.2. Retrouver, pour k entier, tel que $k \geqslant 2$, $P(Y_2 = k)$ par un raisonnement probabiliste direct, sans utiliser la question 1.2.1.

Tournez la page S. V. P.

Deuxième partie

2.1. On considère la v.a. Q égale au nombre d'enfants d'un couple qui se donne pour but d'avoir une fille et un garçon, qui a donc des enfants jusqu'à ce qu'il ait une fille et un garçon, et n'en a plus ensuite.

2.1.1. Calculer la loi de Q, sa fonction génératrice et le rayon de convergence de celle-ci.

2.1.2. Calculer $E(Q)$ et $V(Q)$.

Application numérique pour $p = 0{,}5$, puis pour $p = 0{,}7$. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles, puis sous forme décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

2.1.3. Dessiner le diagramme en bâtons de la loi de Q (défini en 1.1.2.) pour $p = q = 0{,}5$.

Déterminer, toujours pour $p = q = 0{,}5$, le plus petit entier k_0 tel que $\mathbf{P}(Q \leqslant k_0) \geqslant 0{,}95$.

2.2. On ne suppose plus $p = q = 0{,}5$.

Pour un couple qui suit la stratégie décrite en 2.1, on note F la v.a. représentant le nombre de filles de ce couple.

Déterminer les lois de la v.a. F conditionnellement à l'événement $(Q = k)$ (k entier tel que $k \geqslant 2$).

Déterminer la loi de la v.a. F, sa fonction génératrice et le rayon de convergence de celle-ci.

Calculer l'espérance et la variance de F.

Vérifier que $E(F) = p.E(Q)$.

Troisième partie

On suppose que tous les couples suivent la stratégie décrite en 2.1.

3.1. On considère à la génération 0 un couple, et on suppose qu'à chaque génération, chaque femme née donne naissance à un nombre de filles suivant la loi de F (définie en 2.2), et que les descendances de chaque femme sont indépendantes les unes des autres. On pose $m = E(F)$, $\sigma^2 = V(F)$, et on note g la fonction génératrice de F.

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ les v.a. représentant le nombre de filles nées à la première, deuxième, ..., $n^{\text{ième}}$ génération. On remarque que X_1 suit la même loi que F. On note $g_1, g_2, \ldots, g_n$ les fonctions génératrices des v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

3.1.1. Montrer que conditionnellement à l'événement $(X_{n-1} = k)$ où k désigne un élément de $\mathbb{N}^*$, X_n est la somme de k v.a. indépendantes de même loi que F.

3.1.2. Calculer la fonction génératrice g_2 de la v.a. X_2 en fonction de g. On commencera par démontrer que, si $k_2 \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(X_2 = k_2) = \sum_{k_1 \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(X_2 = k_2 / X_1 = k_1)\, \mathbf{P}(X_1 = k_1).$$

N.B. — *On pourra, dans cette question et dans la suivante, admettre la légitimité de l'interversion de deux sommations, sans chercher à la justifier.*

3.1.3. Montrer que l'on a :
$g_n(s) = g_{n-1}(g(s))$ au moins pour $|s| \leqslant 1$.

3.1.4. En déduire l'expression de g_n en fonction de g.

3.2. En utilisant la question 3.1.3, montrer par récurrence que : $E(X_n) = m^n$.

3.3. En utilisant la question 3.1.3, montrer que :
$V(X_n) = m^2\, V(X_{n-1}) + m^{n-1}\, \sigma^2$
et en déduire $V(X_n)$ en fonction de m, σ et n.

Application numérique : calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ pour $p = q = 0{,}5$.

3.4. On définit la v.a. Z_n en posant : $Z_n = 1 + X_1 + \ldots + X_n$, c'est-à-dire le nombre total de filles de la descendance du couple initial jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ génération, y compris la femme ancêtre à la génération 0.

Calculer $E(Z_n)$ et $\lim_{n \to +\infty} E(Z_n)$.